ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II»
(МГУПС(МИИТ)

Пособие для подготовки к олимпиаде школьников по математике «Паруса надежды».

В.Н. Деснянский, А.И. Камзолов

Часть I

Москва 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

МИИТ имеет давние традиции проведения как математических олимпиад, так и по другим предметам школьного курса (физика, русский язык и т.д.). За последние годы эти олимпиады проходят под брендом «Паруса надежды».

Цель проведения этих соревнований (олимпиада и есть соревнование между участниками за лучшее знание предмета) не только формально выявить наилучших, но и приобщить как можно больше школьников к интеллектуальному труду – решению задач. Ведь, как правило, задачи, которые предлагаются на олимпиаде, существенно отличаются от того стандартного набора задач, которые предлагаются среднему ученику в школе. Решение таких простых задач не выходит за рамки чисто технических умений и несложных преобразований на основе заученных формул или вызубренных правил. Данное пособие конечно не ставит перед собой цель научить решать всевозможные или невозможные задачи. Понятно, что никакие пособия в любом объеме не могут даже близко подойти к такой цели. Как говорил Кузьма Прутков, зри в корень и не пытайся объять необъятное. Тем не менее, авторы попытаются предложить несколько рецептов или советов, на основе которых можно в приемлемое время достичь успеха в решении некоторых типов задач.

И в заключение этого краткого введения скажем, что в пособии будут рассматриваться только те задачи, которые в той или иной степени носят творческий характер, или имеют какую-то особенность, которая требует хоть минимального творческого подхода. И наконец, так как пособие намечено для издания в несколько частях, то в первом выпуске, мы затронем лишь одну, но сверхважную тему, как-то решение разных типов математических неравенств. Не секрет, что в решении подобных задач абитуриенты допускают огромное число ошибок, связанных с неправильной интерпретацией основных теоретических положений.

И последнее, что хотелось бы сказать.

Никакое пособие не может заменить или принести больше пользы, чем непосредственное общение школьников с преподавателем. Этого эффективно можно достичь, если абитуриент будет посещать дополнительные курсы по математике, которые ежегодно организуются в МИИТе на базе факультета довузовской подготовки. На этих курсах работают очень квалифицированные и опытные преподаватели с многолетним стажем работы. Успеха Вам наши дорогие будущие студенты! И главное не бойтесь, дерзайте! Как говорили древние: дорогу осилит идущий.

§1 Неравенства с модулем.

Определение. Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x называется само число, если $x \geq 0$, и число –x, если $x < 0$.
Обозначение: |x|.
Свойства.
1. $|x| \geq 0$;
2. $(|x|)^2 = x^2$;
3. $|x| = \sqrt{x^2}$;
4. $|x * y| = |x| * |y|$;
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;
6. $|x| \geq x$;
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
8. $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

При решении неравенств с модулем обычно сводят задачу к решению неравенств, не содержащих модулей. Часто это достигается за счет того, что неравенство решается на промежутках, где функции, стоящие под знаками модулей, не меняют знака. Полезно также использовать следующие утверждения:

1. Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ эквивалентно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$; а неравенство $|f(x)| < g(x)$ эквивалентно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$.
2. Неравенство $|f(x)| \geq g(x)$ эквивалентно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x), \end{array}\right.$ а неравенство $|f(x)| > g(x)$ эквивалентно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$
3. Неравенство $|f(x)| \geq |g(x)|$ эквивалентно неравенству $f^2(x) \geq g^2(x)$, а неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ эквивалентно неравенству $|f(x)|^2 > |g(x)|^2$.

Примеры решения неравенств с модулем.
Пример 1. Решить неравенство
$|x + 3| + |x - 2| < 7$.
Решение.
1-й способ (метод интервалов).
На числовой оси отмечаем числа $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$, при которых обращаются в нуль функции, стоящие под знаками модулей. Эти числа разбивают числовую ось на три промежутка: $(-\infty; -3), [-3; 2], [2; +\infty)$. Будем искать решения неравенств на каждом из промежутков.

1) Если $x \in (-\infty; -3)$, то $x + 3 < 0$. Следовательно, $|x + 3| = -(x + 3)$, $|x - 2| = -(x - 2)$ и мы приходим к решению системы неравенств $\begin{cases} x < -3, \\ -(x + 3) - (x - 2) < 7, \end{cases}$ которая эквивалентна системе $\begin{cases} x < -3, \\ x > -4. \end{cases}$ Отсюда получаем, что $x \in (-4; -3)$.
2) Если $x \in [-3; 2)$, то $x + 3 \geq 0$, $x - 2 < 0$. Следовательно, $|x + 3| = x + 3$, $|x - 2| = 2 - x$ и мы приходим к решению системы неравенств $\begin{cases} -3 \leq x < 2 \\ x + 3 + 2 - x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < 2 \\ 5 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 2)$.

3) Если $x \in [2;+\infty)$, то $x+3>0, |x-2|=x-2$ и мы приходим к решению системы неравенств $\begin{cases} x \ge 2 \\ x+3+x-2<7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2;3)$.

   Объединяя решения на каждом из промежутков, получаем, что множество решений неравенства есть интервал (-4;3). Ответ: (-4;3).

2-й способ.

$|x+3|+|x-2|<7 \Leftrightarrow |x+3|<7-|x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x+3<7-|x-2|, \\ x+3>-7+|x-2|, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} |x-2|<4-x, \\ |x-2|<x+10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<4-x, \\ x-2>x-4, \\ x-2<x+10, \\ x-2>-x-10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ -2>-4, \\ -2<10, \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x>-4. \end{cases}$

Множество решений этой системы неравенств есть интервал (-4;3). Ответ: (-4;3).

Пример 2. Решить неравенство

$|x^2-2x-3| \ge 2x$.

Решение.

1-й способ (метод интервалов).

Квадратный трехчлен x^2-2x-3 обращается в нуль при $x=-1$ и $x=3$. Эти числа разбивают числовую ось на промежутки $(-\infty;-1], (-1;3), [3;+\infty)$. Решаем неравенство на каждом из промежутков.

1) Если $x \le -1$, то $|x^2-2x-3| = x^2-2x-3$. Получаем

$$x^2-4x-3 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \le 2-\sqrt{7}, \\ x \ge 2+\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \le -1.$$

2) Если $x \in (-1;3)$, то $x^2-2x-3<0$ и $|x^2-2x-3| = -x^2+2x+3$.

   Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} -1<x<3, \\ -x^2+2x+3 \ge 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3, \\ x^2 \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3, \\ -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1<x \le \sqrt{3}.$$

3) Если $x \in [3;+\infty)$, то $x^2-2x-3 \ge 0$ и $|x^2-2x-3| = x^2-2x-3$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x \ge 3 \\ x^2-2x-3 \ge 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2-4x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x \le 2-\sqrt{7} \\ x \ge 2+\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2+\sqrt{7}.$$

   Объединяя решение неравенства на каждом из промежутков, получаем ответ: $(-\infty;\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{7};+\infty)$.

2-й способ.

1) Так как $|x^2-2x-3| \ge 0$ для любого x, то неравенство $|x^2-2x-3| \ge 2x$ выполняется, если $x \le 0$.
2) Если $x>0$, то

$|x^2-2x-3| \ge 2x \Leftrightarrow (|x^2-2x-3|)^2 \ge (2x)^2 \Leftrightarrow (x^2-2x-3)^2 \ge (2x)^2 \Leftrightarrow$
$(x^2-2x-3)^2-(2x)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2-4x-3)(x^2-3) \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{7} \le x \le \sqrt{3} \\ x \ge 2+\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{7};+\infty)$$

.

Объединяя решения, получаем, что ответ: $\left(-\infty;\sqrt{3}\right]\cup\left[2+\sqrt{7};+\infty\right)$

3-й способ.

$$|x^2-2x-3|\geq 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3\geq 2x, \\ x^2-2x-3\leq -2x, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-3\geq 0, \\ x^2-3\leq 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\leq 2-\sqrt{7} \\ x\geq 2+\sqrt{7} \end{array}\right. \\ -\sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x\leq \sqrt{3} \\ x\geq 2+\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;\sqrt{3}\right]\cup\left[2+\sqrt{7};+\infty\right)$.

Пример 3. Решить неравенство.

$\big|3-|x-2|\big|\leq 1.$

Решение.

$$\big|3-|x-2|\big|\leq 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3-|x-2|\leq 1, \\ 3-|x-2|\geq -1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x-2|\geq 2, \\ |x-2|\leq 4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-2\geq 2, \\ x-2\leq -2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x-2\leq 4, \\ x-2\geq -4, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\geq 4, \\ x\leq 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x\leq 6, \\ x\geq -2, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\leq x\leq 0, \\ 4\leq x\leq 6. \end{array}\right.$$ Ответ: $[-2;0]\cup[4;6]$.

Пример 4. Решить неравенство.

$|x^3+2x^2-5x+3|\geq x^3+x^2-3.$

Решение.

$$|x^3+2x^2-5x+3|\geq x^3+x^2-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+2x^2-5x+3\geq x^3+x^2-3 \\ x^3+2x^2-5x+3\leq -x^3-x^2+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x+6\geq 0 \\ 2x^3+3x^2-5x\leq 0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\leq 2, \\ x\geq 3, \end{array}\right. \\ x(2x^2+3x-5)\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\leq 2, \\ x\geq 3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -\frac{5}{2} \\ 0\leq x\leq 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x\geq 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

Пример 5. Найти все значения параметра а, при каждом из которых неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$ выполняется для любого x.

Решение.

$$|x+1|+2|x+a|>3-2x \Leftrightarrow |x+1|>3-2x-2|x+a| \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x+1>3-2x-2|x+a| \\ x+1<-3+2x+2|x+a| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2|x+a|>2-3x, \\ 2|x+a|>4-x, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x+a)>2-3x, \\ 2(x+a)<3x-2, \\ 2(x+a)>4-x, \\ 2(x+a)<x-4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x>2-2a, \\ x>2a+2, \\ 3x>4-2a, \\ x<-2a-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{2-2a}{5}, \\ x>2a+2, \\ x>\frac{4-2a}{3}, \\ x<-2a-4. \end{array}\right.$$

Любое число x является решением этой совокупности неравенств, если выполняется одно из неравенств $\frac{2-2a}{5} < -2a-4$, $2a+2 < -2a-4$, $\frac{4-2a}{3} < -2a-4$, т.е а является решением совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{c} 2-2a < -10a-20 \\ 4a < -6 \\ 4-2a < -6a-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8a < -22, \\ a < -\frac{3}{2} \\ 4a < -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -\frac{11}{4} \\ a < -\frac{3}{2} \\ a < -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow a < -\frac{3}{2}.$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{3}{2})$.

Пример 6. При каких значениях параметра а неравенство $|x+1-a|+|x-2+a| \leq 2a$ выполняется для любого х, принадлежащего отрезку $[1;2]$.

Решение.

$$|x+1-a|+|x-2+a| \leq 2a \Leftrightarrow |x+1-a| \leq 2a-|x-2+a| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+1-a \leq 2a-|x-2+a| \\ x+1-a \geq |x-2+a|-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2+a| \leq 3a-1-x \\ |x-2+a| \leq x+1+a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-2+a \leq 3a-1-x \\ x-2+a \geq x-3a+1 \\ x-2+a \leq x+1+a \\ x-2+a \geq -x-1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 2a+1 \\ 4a \geq 3 \\ 0 \leq 3 \\ 2x \geq -2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a+\frac{1}{2} \\ x \geq -a+\frac{1}{2} \\ a \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Таким образом, неравенство имеет решением отрезок $[\frac{1}{2}-a;\ \frac{1}{2}+a]$ при $a \geq \frac{3}{4}$. Если $a < \frac{3}{4}$, то неравенство не имеет решений.

Для того, чтобы неравенство выполнялось для любого х, принадлежащего отрезку [1;2], необходимо и достаточно, чтобы отрезок [1;2] содержался в отрезке $[\frac{1}{2}-a;\ \frac{1}{2}+a]$, а это выполнится, если $\frac{1}{2}-a \leq 1$ и $\frac{1}{2}+a \geq 2$, т.е. а является решением системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}-a \leq 1 \\ \frac{1}{2}+a \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{2} \\ a \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \geq \frac{3}{2}.$$

Ответ: $[\frac{3}{2}; +\infty)$

Пример 7. Решить неравенство.

$$\frac{(|x^2-4|-5)(|x+5|-8)}{|x-3|-|x-1|} > 0$$

Чтобы «убрать» модули, умножим обе части неравенства на положительную величину

$$\frac{(|x^2-4|+5)(|x+5|+8)}{|x-3|+|x-1|}$$

Тогда получим

$$\frac{((x^2-4)^2-25)((x+5)^2-64)}{(x-3)^2-(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-9)(x^2+1)(x+13)(x-3)}{(-2)(2x-4)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2(x+13)(x+3)}{x-2} < 0.$$

Методом интервалов получаем ответ: $x < -13;\ -3 < x < 2;$

Задачи для самостоятельного решения

1. $|4x-|x-3|-1| > 16$
2. $|3x^2-12x+6| \leq 5x-4$
3. $|x^2-4|x|+3| < 2$

4. $|x^2+x-2|+|x+4| \le x^2+2x+6$
5. $\frac{1}{x-1}+\frac{3}{|x|+1} \ge \frac{1}{|x|-1}$
6. $x^2+4 \ge |3x+2|-7x$
7. $(|x-1|-3)(|x+2|-5) < 0$
8. $|x^3-1| \ge 1-x$
9. $\frac{(|x^2-1|-|x|)(|x-1|-|x+2|)}{(|x^2-4|-1)(|2x-1|-4)} \ge 0$
10. Для каждого значения параметра а решить неравенство $|x-a|-|x+2a| < 2$
11. Найти все значения параметра а, при которых неравенство $|x^2-2x+a| > 5$ не имеет решений на отрезке $[-1;2]$

§2 Иррациональные неравенства.

Иррациональным неравенством называется неравенство, где переменное х стоит под знаком какого-либо корня (квадратного, кубического и т.д.) Также к этому типу мы будем относить неравенства, когда некоторая функция от х присутствует в неравенстве под знаком корня. Примерами таких неравенств являются, например:
$\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-1} > \sqrt{3x-3}$; $\sqrt{sinx-x} \ge \sqrt{1-cosx}$ или $\sqrt{2^{x^2-x}-1}+\sqrt{3-2^x} \le 1$.
Решить неравенство – значит найти все значения х, при которых данное неравенство верно, при этом для всех таких х должны быть определены значения функции, входящие в данное неравенство.
Стандартный способ, который используется при решении таких неравенств – это способ последовательного возведения в квадрат, куб и т.д. обеих частей неравенства с целью освобождения от корней. Этот способ сопровождается большой технической работой и требует не только много времени, но часто приводит к неравенству, которое невозможно решить в рамках знаний по математике средней школы. Поэтому мы остановимся здесь на некоторых приемах, которые могут привести к успеху, т.е. решению данного неравенства. Рассматривая решение примеров, мы будем ссылаться на некоторые теоретические факты, относящиеся к решению неравенств, доказательство этих утверждений мы оставляем читателю.
Задача 1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}-\sqrt{1-3x}} \ge 0$$

Решим это неравенство двумя способами. Первый – умножением на знакопостоянную функцию.
Находим ОДЗ $0 \le x < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{3}$. Тогда в ОДЗ

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}-\sqrt{1-3x}} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}))}{(\sqrt{x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{x}+\sqrt{1-3x})} \Leftrightarrow \frac{x+2-1+x}{x-1+3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(4x-1) \ge 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \text{Ответ } \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{3}$$

Второй способ: метод замены множителей. Знак неравенства $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ совпадает со знаком х-у, поэтому $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}-\sqrt{1-3x}} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-1+x}{x-1+3x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{4x-1} \ge 0 \Leftrightarrow$ ответ $\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{3}$

Задача 2. Решить неравенство.

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \le x$$

ОДЗ: $x \le 1; x \ne -1$. В ОДЗ неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{1-x^3} \le x^2+x+1 \\ x > -1\end{cases} \\ \begin{cases}\sqrt{1-x^3} \ge x^2+x+1 \\ x < -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)} \le x^2+x+1 \\ x > -1\end{cases} \\ \begin{cases}\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)} \ge x^2+x+1 \\ x < -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{1-x} \le \sqrt{x^2+x+1} \\ x > -1\end{cases} \\ \begin{cases}\sqrt{1-x} \ge \sqrt{x^2+x+1} \\ x < -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x \le x^2+x+1 \\ x > -1\end{cases} \\ \begin{cases}1-x \ge x^2+x+1 \\ x < -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2x \ge 0 \\ x > -1\end{cases} \Rightarrow x \ge 0 \\ \begin{cases}x^2+2x \le 0 \\ x < -1\end{cases} \Rightarrow -2 \le x < -1\end{array}\right.$$

А тогда с учетом ОДЗ ответ: $[-2;-1] \cup [0;1]$.

Задача 3. Решить неравенство

$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} \ge 6 - \sqrt{x+8}$

Попытка решить это неравенство стандартным способом, т.е. путем последовательного возведения в квадрат вряд ли приведет к успеху, так как при освобождении от корней получается многочлен большой степени. С другой стороны, если записать это неравенство в виде

$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} \ge 6$,

то можно заметить, что в ОДЗ каждая из функций в левой части является строго монотонной функцией, а тогда сумма этих функций есть функция монотонная. Также нетрудно заметить, что левая часть неравенства при x=1 равна 1+2+3=6. Отсюда сразу следует ответ, что решение будет $x \ge 1$.

Задача 4. Решить неравенство

$(x^2-x) * 2^x + x * 2^{x+1}\sqrt{1-x^2} < 4x - 4 + 8\sqrt{1-x^2}$.

Находим ОДЗ: $-1 \le x \le 1$.

Группируя слагаемые, получим равносильное неравенство:

$\left(x-1+2\sqrt{1-x^2}\right)(2^x * x - 4) < 0$. В ОДЗ множитель $x * 2^x$ меньше или равен 2, поэтому $2^x * x - 4 < 0$. А тогда неравенство равносильно неравенству:

$\left(x-1+2\sqrt{1-x^2}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} > 1-x$. Так как правая часть этого неравенства в ОДЗ неотрицательная, то неравенство можно возвести в квадрат, получим

$4-4x^2 > 1-2x+x^2$ или: $5x^2-2x-2 < 0$. Решением этого квадратного неравенства будет промежуток $-0{,}6 < x < 1$, что и будет ответом.

Задача 5. Решить неравенство

$\sqrt{4x-x^2-3} \ge \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}$

Находим корни подкоренных выражений, тогда неравенство имеет вид:

$\sqrt{(x-1)(3-x)} \ge \sqrt{(3-x)(4-x)} - \sqrt{(3-x)(2-x)}$

Находим ОДЗ: $1 \le x \le 2, x = 3$. При x=3 неравенство верно, т.е. x=3 корень.

Далее: если $1 \le x \le 2$, то обе части неравенства можно сократить на общий положительный множитель $\sqrt{3-x}$, а тогда получим:

$\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} \ge \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)} \ge 4-x \Leftrightarrow$

$2\sqrt{(x-1)(2-x)} \ge 3-x \Leftrightarrow 4(x-1)(2-x) \ge (3-x)^2 \Leftrightarrow 5x^2-18x+17 \le 0$

. Но так как D=-16, то квадратный трехчлен не имеет корней, а неравенство не имеет решений. Таким образом, ответ $x = 3$.

Задача 6. Решить неравенство

$\left|\sqrt{x-4}-3\right| > \left|\sqrt{9-x}-2\right|+1$

Обозначим $x-4=t$. Тогда $\left|\sqrt{t}-3\right| > \left|\sqrt{5-t}-2\right|+1$.

Находим ОДЗ $0 \le t \le 5$. В области ОДЗ $\sqrt{t}-3<0$. Следовательно по свойству модуля получим $3-\sqrt{t} > \left|\sqrt{5-t}-2\right|+1$. Это неравенство равносильно системе:

$$2 > \sqrt{t}+\left|\sqrt{5-t}-2\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4 > \sqrt{t}+\sqrt{5-t}\\ 0 \le t \le 1\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{5-t} > \sqrt{t}\\ 1 < t \le 5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}16 > t+5-t+2\sqrt{t(5-t)}\\ 0 \le t \le 1\end{cases}\\ \begin{cases}t < \frac{5}{2}\\ 1 < t \le 5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}11 > 2\sqrt{t(5-t)}\\ 0 \le t \le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t^2-5t+\frac{121}{4} > 0\\ 0 \le t \le 1\end{cases}$$

. Т.к. $D<0$, то $0 \le t \le 1$, отсюда: $0 \le t < \frac{5}{2}$.

Возвращаясь к старой переменной, получим ответ: $4 \le x < \frac{13}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить неравенство $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x} < 35-2x$
2. Решить неравенство $3\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8} \ge 24-2\sqrt{2x+23}$
3. Решить неравенство $\sqrt[4]{\frac{1-4^x}{4^x-1}}-63\sqrt{\frac{4^x}{1-4^x}} \le 3\sqrt{63}$
4. Решить неравенство $\sqrt{2-5x-3x^2}+2x > 2x*3^x\sqrt{2-5x-3x^2}+4x^2*3^x$
5. Найти все решения системы
$$\begin{cases}cos10x-2sin5x \ge 3*4^t-32^{t+2}+\frac{27}{2}\\ \sqrt{(2-\sqrt{3})^{4t}+(2+\sqrt{3})^{4t}+2}+14\log_2(cos10x)+6cos5x \ge (2t+1)^{1,5}\end{cases}$$
6. Найти все значения параметра а, при который неравенство
$$\sqrt[4]{x^2-6ax+10a^2}+\sqrt[4]{3+6ax-x^2-10a^2} \ge \sqrt[4]{\sqrt{3a}+24-\frac{3}{\sqrt{2}}+\left|y-\sqrt{2}a^2\right|+|y-\sqrt{3}a|}$$
имеет единственное решение
7. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1$

§3 Показательные неравенства.

Так как показательная функция $y=a^x$ – возрастающая функция, если $a>1$, и убывающая функция, если $0<a<1$, то $a^{f(x)} \ge a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$, если $a>1$, $a^{f(x)} \ge a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$, если $0<a<1$.

$a^{f_1(x)} \ge a^{f_2(x)} \Leftrightarrow (f_1(x)-f_2(x))(a-1)$

$a^{f(x)}-1 \Leftrightarrow f(x)(a-1)$

Примеры решения показательных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$0,5^{4x^2-2x-2} < 0.5^{2x-3}$

Решение

$0.5^{4x^2-2x-2} < 0.5^{2x-3} \Leftrightarrow 4x^2-2x-2 > 2x-3 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2>0 \Leftrightarrow 2x-1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{1}{2}$

Ответ: $(-\infty;\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2};+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство
$3^{x+1}-9^x \geq 2$
Решение.
Введя новую переменную $t=3^x$, получаем систему $\begin{cases} t>0, \\ 3t-t^2 \geq 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>0, \\ t^2-3t+2 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2.$
Возвращаясь к переменной x, получаем $1 \leq 3^x \leq 2 \Leftrightarrow \log_3 1 \leq x \leq \log_3 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_3 2$
Ответ: $[0; \log_3 2]$.

Пример 3. Решить неравенство
$\left(2+\sqrt{3}\right)^x-5\left(2-\sqrt{3}\right)^x<4$
Решение. Так как $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$, то $\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}$ и неравенство запишется как $\left(2+\sqrt{3}\right)^x-\frac{5}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}<4$. Введя переменную $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, получаем
$\begin{cases} t>0, \\ t-\frac{5}{t}<4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ -1<t<5, \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<5.$
Для переменной x получаем неравенства $0<\left(2+\sqrt{3}\right)^x<5$, откуда $x<\log_{2+\sqrt{3}} 5$.
Ответ: $(-\infty; \log_{2+\sqrt{3}} 5)$.

Пример 4. Решить неравенство
$3^x * 4^{\frac{x-1}{x}}>18$
Решение.
ОДЗ: $x \neq 0$
Логарифмируя по основанию 3, получаем

$$x+2\left(\frac{x-1}{x}\right) * \log_3 2>2+\log_3 2 \Leftrightarrow x+2\log_3 2-\frac{2}{x}\log_3 2>2+\log_3 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2+\log_3 2\left(1-\frac{2}{x}\right)>0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+\log_3 2)}{x}>0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем, что $x \in (-\log_3 2\,; 0) \cup (2; +\infty)$.
Ответ: $(-\log_3 2\,; 0) \cup (2; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство
$4^x-2*3^{2x}-6^x<0$
Решение.
$4^x-2*3^{2x}-6^x<0 \Leftrightarrow 2^{2x}-2*3^{2x}-2^x*3^x<0 \Leftrightarrow 1-2*\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^x<0 \Leftrightarrow 2*\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-1>0$
.
Введя новую переменную $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, получаем систему неравенств $\begin{cases} t>0, \\ 2t^2+t-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ \left[\begin{array}{l} t>\frac{1}{2} \\ t<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t>\frac{1}{2}.$
Возвращаясь к переменной x, получаем $\left(\frac{3}{2}\right)^x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\log_{3/2}\frac{1}{2}$.
Ответ: $(\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}; +\infty)$

Пример 6. Решить неравенство

$3^{2x+1} + 4^{x+1} < 12 + 3^x * 12^x$

Решение.

$3^{2x+1} + 4^{x+1} < 12 + 3^x * 12^x \Leftrightarrow 3 * 3^{2x} + 4 * 4^x < 3 * 4 + 3^{2x} * 4^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(3^{2x} - 4) + 4^x(4 - 3^{2x}) < 0 \Leftrightarrow (3^{2x} - 4)(4^x - 3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^{2x} - 4 > 0, \\ 4^x - 3 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^{2x} - 4 < 0, \\ 4^x - 3 < 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \log_3 2 \\ x > \frac{1}{2}\log_3 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \log_3 2 \\ x < \frac{1}{2}\log_3 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

.

Сравним числа $\log_3 2$ и $\frac{1}{2}\log_2 3$. Так как $2^4 < 3^3$, а $2^3 < 3^2$, то

$\log_3 2 = \frac{1}{4}\log_3 2^4 < \frac{1}{4}\log_3 3^3 = \frac{3}{4}$; а $\frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{1}{4}\log_2 3^2 > \frac{1}{4}\log_2 2^3 = \frac{3}{4}$.

Таким образом, $\log_3 2 < \frac{1}{2}\log_2 3$.

Возвращаясь к совокупности, получаем $\left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{2}\log_2 3, \\ x < \frac{1}{2}\log_2 3, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; \log_3 2) \cup (\frac{1}{2}\log_2 3\,; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; \log_3 2) \cup (\frac{1}{2}\log_2 3\,; +\infty)$

Пример 7. Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие неравенству $a^2 - 8 * 3^x * a - 9^{x+1} > 0$

Решаем это неравенство как квадратное относительно параметра a. Тогда $a = 4 * 3^x \pm \sqrt{16 * 3^{2x} + 9 * 3^{2x}} = 4 * 3^x \pm 5 * 3^x$. Отсюда $a_1 = 9 * 3^x, a_2 = -3^x$.

Следовательно неравенство можно переписать в виде:

$(9 * 3^x - a)(3^x + a) < 0$

Рассмотрим случаи: $a = 0, a < 0$ и $a > 0$. В первом случае очевидно нет решений. Пусть $a < 0$, тогда первый множитель положителен и следовательно имеем

$3^x < -a \Leftrightarrow x < \log_3(-a)$; При $a > 0$ $3^x + a > 0$ и следовательно получим, что

$3^x < \frac{a}{9} \Leftrightarrow x < \log_3 a - 2$.

Ответ: при $a < 0$ $x < \log_3(-a)$; при $a = 0$ решений нет; при $a > 0$ $x < \log_3 a - 2$.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить неравенства.

1. $6^{\frac{x}{2}} - 3 * 6^{1-\frac{3x}{2}} > 3 * 6^{-\frac{x}{2}}$;
2. $9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}$;
3. $2^{(x+2)^2} + \frac{1}{4} \le 2^{x^2-2} + 16^{x+1}$;
4. $2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} < 5^x - 5^{x+1}$;.
5. $(\sqrt{5 + \sqrt{24}})^x + (\sqrt{5 - \sqrt{24}})^x < 10$;
6. $9 * 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \ge 9^{\sqrt{x}}$;
7. $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1$;
8. $\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \le 3$;

9. $\frac{3^{2|x-1|+3}}{4} < 3^{|x-1|}$;

10. $\frac{(2^x-1)(8-x^3)(\sqrt{x+20}-\sqrt{2x+30})(|x-2|-4-x^2)}{(|x|^{2x-1}-|x|^{5-x})((x^2+x+1)^{\frac{x+2}{x+2}}-(x^2+x+1)^2)} < 0$

§4 Логарифмические неравенства.

а) Напомним основные свойства и формулы, на основании которых решаются логарифмические уравнения.

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию $a > 0,\ a \neq 1$ называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить b. Таким образом, $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$. Поскольку логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной, то все свойства логарифмической функции вытекают из свойств показательной функции. Так, например, если $y = a^x \ \ (a > 1)$ является монотонно возрастающей функцией, то функция $y = \log_a x$ также является монотонно возрастающей. Аналогично, если $y = a^x \ \ (a < 1)$ является монотонно убывающей, то функция $y = \log_a x \ (a < 1)$ так же монотонно убывающая. Исходя из этого, также легко заметить, что $\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1,\ a^{\log_a b} = b\ (b > 0, a > 0, a \neq 1)$. Последнее равенство называют основным логарифмическим тождеством. Другим важным тождеством является тождество $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a, b, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$, которое называют формулой перехода к новому основанию. К другим важным формулам относят формулы

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,\ \log_a b^k = k \log_a b$, которые верны, если $M, N, b > 0$.

б) Переходим теперь по сути дела к основной задаче решения логарифмических неравенств. Как известно, при решении рациональных неравенств основным методом является метод интервалов, суть которого состоит в том, что любое неравенство приводимо к виду:

$$\frac{f_1 * f_2 * \dots * f_m}{\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n} \vee 0$$

Где символ «V» обозначает один из знаков неравенства: $<, \leq, >, \geq$. Так при решении данного неравенства нас интересует только знак любого множителя в числителе, или знаменателе, а не его абсолютная величина, то если нам по каким-либо причинам неудобно работать с данным множителем, то мы можем заменить его на другой знакосовпадающий с ним в области определения неравенства (имеющий в этой области те же корни). При этом всегда нужно помнить, что любые замены множителей возможны лишь тогда, когда неравенство приведено к виду сравнения с нулем! Так как решение логарифмических неравенств тесно переплетается с решением показательных неравенств, то приведем здесь основные замены с учетом монотонности показательной и логарифмической функции.

1. $a^{t_1} - a^{t_2} \Leftrightarrow (t_1 - t_2)\lg a$ (1)
2. в ОДЗ $\lg x_1 - \lg x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2$. Если положить $x_1 = a, x_2 = 1$, то отсюда получим, что $\lg a \Leftrightarrow a - 1$ (2)
3. Из (1) следует, что $a^{t_1} - a^{t_2} \Leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1)$
4. Для логарифмической функции $y = \log_a t$ получаем, что $\log_a t_1 - \log_a t_2 = \frac{\lg t_1}{\lg a} - \frac{\lg t_2}{\lg a} = \frac{1}{\lg a}(\lg t_1 - \lg t_2) \Leftrightarrow \log_a t_1 - \log_a t_2 \Leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a-1}$ (3)

Заметим, что (1) и (3) равносильны, поскольку показательная и логарифмическая функции взаимообратны.

в) Из (1) и (3) следуют полезные схемы решения основных показательных и логарифмических неравенств

1) $a^f > a^\varphi \Leftrightarrow \begin{cases}(f-\varphi)(a-1)>0\\ a>0\end{cases}$

2) $\begin{cases}a^f > b\\ b>0\end{cases} \Leftrightarrow (f-\log_a b)(a-1)>0$

3) $\log_a f > \log_a \varphi \Leftrightarrow \begin{cases}(f-\varphi)(a-1)>0\\ f>0\\ \varphi>0\\ a>0\end{cases}$

4) $\log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases}(f-a^b)(a-1)>0\\ f>0\\ a>0\end{cases}$

5) $\log_a f + \log_a \varphi > 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(f\varphi-1)(a-1)>0\\ f>0\\ \varphi>0\\ a>0\end{cases}$

6) $\dfrac{a^{f_1}-a^{f_2}}{a^{\varphi_1}-a^{\varphi_2}} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f_1-f_2}{\varphi_1-\varphi_2} > 0$

Дальше рассмотрим примеры решения логарифмических неравенств, используя метод замены множителей.

Пример 1.

Решить неравенство $\log_{x^2}(3-2x) > 1$

$$\log_{x^2}(3-2x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2-1} > 0\\ 3-2x>0\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} < 0\\ x < {}^3/_2,\, x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \text{Ответ } -3 < x < -1.$$

Пример 2.

Решить неравенство $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$

$$5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 5^2 \Leftrightarrow \log_x \frac{8-12x}{x-6} > 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{8-12x}{x-6}-x^2\right)(x-1)>0\\ \dfrac{8-12x}{x-6}>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(8-12x-x^3+6x^2)(x-1)}{x-6}>0\\ \dfrac{2-3x}{x-6}>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-2)^3(x-1)}{x-6}<0\\ \dfrac{2}{3}<x<6\end{cases} \Leftrightarrow \text{Ответ: } \frac{2}{3}<x<1; 2<x<6$$

.

Пример 3.

Решить неравенство $\log_3(4^x+1) + \log_{4^x+1} 3 > 2.5$

Пусть $\log_3(4^x+1) = y$, тогда $\log_{4^x+1} 3 = \frac{1}{y}$. Поэтому имеем:

$$y+\frac{1}{y}-2.5>0 \Leftrightarrow \frac{y^2-2.5y+1}{y}>0 \Leftrightarrow \frac{(y-2)(y-0.5)}{y}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<y<{}^1/_2 \\ y>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 0<\log_3(4^x+1)<\frac{1}{2} \\ \log_3(4^x+1)>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(4^x+1)<\log_3\sqrt{3} \\ \log_3(4^x+1)>\log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x+1<\sqrt{3} \\ 4^x+1>9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x<\sqrt{3}-1 \\ 4^x>8 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x<\log_4\left(\sqrt{3}-1\right) \\ x>{}^3/_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{Ответ } x<\log_4\left(\sqrt{3}-1\right); x>{}^3/_2$$

.

Пример 4.

Решить неравенство $\log_x \log_2(4^x-12) \le 1$.

$$\log_x \log_2(4^x-12) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, x\ne 1 \\ \log_2(4^x-12)>0 \\ (\log_2(4^x-12)-x)(x-1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (4^x-12-2^x)(x-1)\le 0 \\ 4^x-13>0 \\ x>0, x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^{2x}-2^x-12)(x-1)\le 0 \\ x>\log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2^x+3)(2^x-4)(x-1)\le 0 \\ x>\log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x-4)(x-1)\le 0 \\ x>\log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1)\le 0 \\ x>\log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ответ $\log_4 13 < x \le 2$

Пример 5.

Решить неравенство $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1$

$$\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2-9x+4-|x-4|)(|x-4|-1)>0 \\ 2x^2-9x+4>0 \\ |x-4|\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((2x^2-9x+4)^2-(x-4)^2)((x-4)^2-1)>0 \\ 2x^2-9x+4>0, x\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2-9x+4-x+4)(2x^2-9x+4+x-4)(x-4-1)(x-4+1)>0 \\ 2x^2-9x+4>0, x\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2-10x+8)(2x^2-8x)(x-5)(x-3)>0 \\ x<\dfrac{1}{2} \text{ или } x>4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4)^2x(x-5)(x-3)>0 \\ x<\dfrac{1}{2} \text{ или } x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ Ответ } x<0;\ x>5$$

Пример 6.

Решить неравенство $\log_{x-1}\left(\frac{2(x-2)(x-4)}{x+5}\right)\ge 1$

Так как $\log_a b \ge \log_a c$ в одз $\Leftrightarrow (b-c)(a-1)$, то

$$\log_{x-1}\left(\frac{2(x-2)(x-4)}{x+5}\right) \geq 1 \iff \begin{cases} \left(\frac{2(x-2)(x-4)}{x+5} - (x-1)\right)(x-1-1) \geq 0 \\ x-1>0, x \neq 2 \\ \frac{(x-2)(x-4)}{x+5} > 0 \iff 1<x<2, x \neq 4 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2(x-2)(x-4) - (x-1)(x+5))(x-2) \geq 0 \\ 1<x<2; x>4 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (2x^2 - 8x - 4x + 16 - x^2 + x - 5x + 5)(x-2) \geq 0 \\ 1<x<2; x>4 \end{cases} \iff \begin{cases} (x^2 - 16x + 21)(x-2) \geq 0 \\ 1<x<2; x>4 \end{cases} \iff$$

Ответ: $8-\sqrt{43} \leq x < 2;\ x \geq 8+\sqrt{43}$

.

Пример 7.

Решить неравенство $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$.

Находим ОДЗ $x>0, x \neq \frac{1}{2}; x<2; x>3$.

Сделаем замену: $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x) \iff \big(f(x)-\varphi(x)\big)(a-1) < 0$

Поэтому:

$\log_{2x}(x^2-5x+6) < \log_{2x} 2x \iff (x^2-5x+6-2x)(2x-1) \iff (x-1)(x-6)\left(x-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ Ответ: $(0<x<\frac{1}{2}) \cup (1;2) \cup (3;6)$

Пример 8.

Решить неравенство $\log_{x-1}(x^2-8x+16) + 2\log_{4-x}(-x^2+5x-4) > 6$

Находим ОДЗ: $\begin{cases} 0<x-1, x-1 \neq 1 \\ 0<4-x; 4-x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<2; 2<x<3; 3<x<4$

Далее: $\log_{x-1}(x-4)^2 + 2\log_{4-x}(4-x)(x-1) > 6$ обозначим $\log_{x-1}(x-4) = y$, тогда $2\log_{x-1}(x-4) + 2\log_{4-x}(4-x) + 2\log_{4-x}(x-1) > 6$,

$$y+\frac{1}{y} > 2 \iff \frac{y^2-2y+1}{y} > 0 \iff 0<y \neq 1 \iff \begin{cases} \log_{x-1}(4-x) > 0 \\ \log_{x-1}(4-x) \neq 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (4-x-1)(x-2) > 0 \\ 4-x \neq x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)(x-2) < 0 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \iff 2<x<2{,}5;\ \frac{5}{2}<x<3$$

.

Ответ: $(2;2{,}5) \cup (2{,}5;3)$

Пример 9. Решить неравенство

$$\frac{(2-x)(2^x-1)(\sqrt{x+20}-\sqrt{2x+30})(|x-2|-4-x^2)}{(|x|^{2x-1}-|x|^{5-x})(\log_{x+20}(12-|x|)-\log_{x+20}(20-2|x|)\log_{\frac{3}{5}} x^2} < 0$$

Множитель 2^x-1 заменяем на x, множитель $\sqrt{x+20}-\sqrt{2x+30}$ заменяем на $(x+20)-(2x+30)$, множитель $|x-2|-4-x^2$ заменяем на $(x-2)^в-(x^2+4)^2$.

В знаменателе первый множитель заменяем на: $(2x-1-(5-x))(x^2-1)$, второй множитель знаменателя заменяем на $(12-|x|-(20-2|x|)(x+19) = (|x|-8)(x+19)$. Затем этот множитель можно заменить на $(x-8)(x+8)(x+19)$. И наконец множитель $\log_{\frac{3}{5}} x^2$совпадает по знаку со множителем x^2-1. Поэтому неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(2-x)x(-x-10)(x-2-(x^2+4))(x-2+x^2+4)}{(3x-6)(x-1)(x+1)(x-8)(x+8)(x+19)(x-1)(x+1)} < 0 \iff$$

$$\iff \frac{(2-x)x(-x-10)(-x^2+x-6)(x^2+x+2)}{3(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x-8)(x+8)(x+19)} < 0$$

Находим ОДЗ $\begin{cases} x \neq 0 \\ 10-2|x|>0 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < x < 0$ и $0 < x < 10$.
Так как множители x^2+x+2 и x^2-x+6 положительны, то неравенство будет равносильно неравенству

$$\frac{(x-2)x(x+10)}{(x-2)(x-8)(x+8)(x+19)} > 0$$ которое в ОДЗ

имеет решение: $(-8;-1) \cup (-1;0) \cup (8;10)$
Ответ: : $(-8;-1) \cup (-1;0) \cup (8;10)$.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить неравенства:

1. $\lg(x-3)+\lg x < \lg(\frac{9x}{2}+4)$
2. $\log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3) \leq 0$
3. $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$
4. $\lg|2x+3|^3 + 2\log_{(2x+1)^2} 10 < 3$
5. $\log_{3-x}(2x+1) * \log_{2x+1} x^2 \leq \log_{3-x}(3x+1)\log_{3x+1}(x+2)$
6. Для всех a решить неравенство $\log_a(3a^x-5) < x+1$
7. $\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \geq -2$
8. $(2^x+3*2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$
9. $\dfrac{\left(\log_2(x-1)-\log_{\frac{1}{2}} x\right)(2^{x^2}-2^x)}{(|x^2-4|-|x|)\log_{\frac{x-1}{x}} 2} > 0$
10. $(4-x)^{x^2-9} - \sin^2 10^o < (4-x)^{\frac{1}{\log_{\cos 10^o}\sqrt{4-x}}}$

Литература.

1. В.И.Голубев. Решение сложных и нестандартных задач по математике. Илекса, Москва, 2007
2. Ю.В.Садовничий. Математика. Тематическая подготовка к ЕГЭ. Илекса, Москва, 2011
3. Г.Дорофеев, М.Потапов, Н.Розов. Математика для поступающих в вузы, «Дрофа», Москва, 1996
4. Математика. Сборник задач по углубленному курсу. «Бином», Москва, 2012
5. Е.В. Хорошилова. Элементарная математика, ч.I, ч.II. изд. МГУ, 2011
6. А.В.Разгулин, М.В.Федотов. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. Алгебра. М, Макс пресс, 2002